Dérivée de Vecteurs

Exercice 5 [1]

Soient les vecteurs :

$$\overrightarrow{v_1} = \sin t\,\vec{\imath} + \cos t\,\vec{\jmath} + t\,\vec{k},$$

et

$$\overrightarrow{v_2} = e^{-t}\vec{\imath} + 2\cos 3t\,\vec{\jmath} + 2\sin 3t\,\vec{k}.$$

Calculer $\frac{d\overrightarrow{v_1}}{dt}$, $\frac{d\overrightarrow{v_2}}{dt}$, puis le module de chacun de ces vecteurs.

Commentaires :

Les vecteurs unitaires $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ forment une base orthonormée dans un repère xyz. Ils sont normés à 1 et orthogonaux donc linéairement indépendants.

Ces vecteurs ont aussi la propriété supplémentaire de ne dépendre ni de la position des corps ni de leurs mouvements. Ils sont donc constants et leurs dérivées sont nulles, quelles que soit les variables utilisées.

Si par exemple un vecteur :

$$\vec{A} = A_1\vec{\imath} + A_2\vec{\jmath} + A_3\vec{k}$$

sa dérivée est donc :

$$\frac{d\vec{A}}{dx} = \frac{d}{dx}(A_1\vec{\imath}) + \frac{d}{dx}(A_2\vec{\jmath}) + \frac{d}{dx}(A_3\vec{k}).$$

Car la dérivée est une opération distributive par rapport à l'addition[2]. Or, en vertu de l'identité :

$$\frac{d}{dx}(AB) = \frac{dA}{dx}\cdot B + A\cdot\frac{dB}{dx},$$

et vu que les vecteurs unitaires $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ sont constants. On obtient alors que :

$$\frac{d\vec{A}}{dx} = \frac{dA_1}{dx}\vec{\imath} + \frac{dA_2}{dx}\vec{\jmath} + \frac{dA_3}{dx}\vec{k}.$$

Donc, en coordonnées xyz, on ne dérive que les composantes A_1, A_2 et A_3 du vecteur $\vec{A}$. Ces mêmes composantes donnent le module du vecteur $\vec{A}$ comme suit :

$$\vec{A} = \left(\vec{A}\cdot\vec{A}\right)^{1/2} = (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)^{1/2}$$

إشتقاقية الأشعة

ليكن الشعاعان :

$$\overrightarrow{v_1} = \sin t\,\vec{\imath} + \cos t\,\vec{\jmath} + t\,\vec{k}$$

و

$$\overrightarrow{v_2} = e^{-t}\vec{\imath} + 2\cos 3t\,\vec{\jmath} + 2\sin 3t\,\vec{k}$$

- احسب $\frac{d\overrightarrow{v_1}}{dt}$ و $\frac{d\overrightarrow{v_2}}{dt}$ ثم طويلة كل منهما.

Vecteur(s)	شعاع، أشعة
Unitaire(s)	وحدوي، وحدوية
Module	طويلة
Repère	معلم
Orthogonal	متعامد
Supplémentaire	إضافية
Position	موضع
Corps	جسم ، أجسام
Mouvement	حركة
Opération	عملية
Distributive	توزيعية
Addition	الجمع
Soustraction	الطرح
Identité	علاقة شهيرة
Coordonnées	إحداثيات
Composante(s)	مركبة، مركبات
Dérivée	إشتقاقية
Définition	تعريف
Fonction	دالة
Composé(e)	مركب، مركبة
Équation	معادلة
Cercle	دائرة
Procédure(s)	إجراء، إجراءات

Solution :

1. Les dérivées de $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$

- Le vecteur $\overrightarrow{v_1}$

La dérivée du vecteur :

$$\overrightarrow{v_1} = \sin t\,\vec{\imath} + \cos t\,\vec{\jmath} + t\vec{k}, \tag{01}$$

est :

$$\frac{d\overrightarrow{v_1}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sin t\,\vec{\imath} + \cos t\,\vec{\jmath} + t\vec{k}\right). \tag{02}$$

Ou :

$$\frac{d\overrightarrow{v_1}}{dt} = \frac{d\sin t}{dt}\vec{\imath} + \frac{d\cos t}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dt}{dt}\vec{k}. \tag{03}$$

D'où :

$$\frac{d\overrightarrow{v_1}}{dt} = \cos t\,\vec{\imath} - \sin t\,\vec{\jmath} + \vec{k}. \blacksquare \tag{04}$$

- Le vecteur $\overrightarrow{v_2}$

La dérivée du vecteur :

$$\overrightarrow{v_2} = e^{-t}\vec{\imath} + 2\cos 3t\,\vec{\jmath} + 2\sin 3t\,\vec{k}, \tag{05}$$

est :

$$\frac{d\overrightarrow{v_2}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(e^{-t}\vec{\imath} + 2\cos 3t\,\vec{\jmath} + 2\sin 3t\,\vec{k}\right). \tag{06}$$

Ou :

$$\frac{d\overrightarrow{v_2}}{dt} = \frac{de^{-t}}{dt}\vec{\imath} + 2\frac{d\cos 3t}{dt}\vec{\jmath} + 2\frac{d\sin 3t}{dt}\vec{k}. \tag{07}$$

D'où :

$$\frac{d\overrightarrow{v_2}}{dt} = -e^{-t}\vec{\imath} - 6\sin 3t\,\vec{\jmath} + 6\cos 3t\,\vec{k}. \blacksquare \tag{08}$$

Où, on a utilisé la définition suivante de la dérivée d'une fonction composée[3] :

$$\frac{d}{dx}f[g(x)] = \frac{df}{dg}\cdot\frac{dg}{dx}. \tag{09}$$

Donc, on posant $u(t) = 3t$ on obtient :

$$\frac{d}{dt}\sin[u(t)] = \frac{d\sin u}{du}\cdot\frac{du}{dt}. \tag{10}$$

2. Les modules $\left\|\frac{d\overrightarrow{v_1}}{dt}\right\|$ et $\left\|\frac{d\overrightarrow{v_2}}{dt}\right\|$

- Le module de $\frac{d\overrightarrow{v_1}}{dt}$

L'application de la définition du "module" au vecteur $\frac{d\overrightarrow{v_1}}{dt}$ dans (04) donne :

$$\left\|\frac{d\overrightarrow{v_1}}{dt}\right\| = [\cos^2 t + (-\sin t)^2 + 1]^{1/2} = 1. \blacksquare \tag{11}$$

Où, on a utilisé l'équation du cercle[4] ;

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1. \tag{12}$$

- Le module de $\frac{d\overrightarrow{v_2}}{dt}$

Pour déterminer le module de $\frac{d\overrightarrow{v_2}}{dt}$ en (08), on applique les mêmes procédures qui ont donné le résultat précédent. On trouve aisément que :

$$\left\|\frac{d\overrightarrow{v_2}}{dt}\right\| = [(-e^{-t})^2 + (-6\sin 3t)^2 + 36\cos^2 3t]^{1/2}. \tag{13}$$

Qui donne :

$$\left\|\frac{d\overrightarrow{v_2}}{dt}\right\| = (e^{-2t} + 36)^{1/2}. \blacksquare \tag{14}$$