1.2 Exercices résolus

1.2.1 Exercice 1

Donner la dimension et les unités dans le Système International (SI) des grandeurs suivantes : 1 Longueur, 2 Temps, 3 Masse, 4 Vitesse, 5 Accélération, 6 Force, 7 Quantité du mouvement, 8 Energie (Travail), 9. Puissance, 10 Masse volumique, 11. Pression, 12 Charge électrique, 13. constante de raideur k, 14 Champ électrique E

CORRIGÉ :

GRANDEUR	DIMENSION	UNITÉ
Longueur	L	mètre (m)
Temps	T	seconde (s)
Masse	M	kilogramme (kg)
Vitesse	$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow v] = LT^{-1}$	m/s
Accélération	$\gamma = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \gamma = LT^{-2}$	m/s^2
Force	$F = m\gamma \Rightarrow [F] = MLT^{-2}$	Newton (N)
Quantité du mouvement	$p = mv \Rightarrow [p] = MLT^{-1}$	$kg\ m/s$
Energie (Travail)	$E = FL \Rightarrow [E = ML^2T^{-2}$	Joule (J)
Puissance	$P = \frac{E}{t} \Rightarrow [P] = ML^2T^{-3}$	Watt (w)
Masse volumique	$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow [\rho] = ML^{-3}$	kg/m^3
Pression	$Pr = \frac{F}{S} \Rightarrow [Pr] = ML^{-1}T^{-2}$	Pascal (Pa)
Charge électrique	$I = \frac{dq}{dt} \Rightarrow q] = IT$	Coulomb (C)
Constante de raideur k	$F = kx \Rightarrow k] = MT^{-2}$	N/m
Champ électrique E	$F = qE \Rightarrow [E] = MLI^{-1}T^{-3}$	Volt/mètre (V/m)

1.2.2 Exercice 2

⊗ La période du pendule simple est donnée par la relation suivante :

$$T = 2\pi l^{\alpha} g^{\beta}$$

l : la longueur du pendule, g : la gravitation.

1. Déterminer les constantes α, β.
2. On donne $T = (2.002 \pm 0.001)$ s, $l = (1.00 \pm 0.02)$ m. Donner l'expression de g, puis sa valeur numérique.
3. Donner l'expression de l'incertitude absolue sur g, puis sa valeur numérique.

<u>CORRIGÉ :</u>

1) $T = 2\pi l^{\alpha} g^{\beta} \Rightarrow [T] = [l]^{\alpha}[g]^{\beta} \Rightarrow [T] = L^{\alpha+\beta} T^{-2\beta}$
   Par superposition : $\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ -2\beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = -\frac{1}{2}$
   Donc : $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$
2) $g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}$
   A.N. : $g = 9.85 m/s^2$
3) On utilise la méthode de différentiel logarithmique :
   i) On prend le logarithme népérien de l'expression de g :

$$\ln g = \ln 4\pi^2 + \ln l - 2\ln T$$

   ii) On prend la différentielle de l'expression précédente

$$d(\ln g) = d(\ln 4\pi^2) + d(\ln l) - 2d(\ln T)$$

On trouve : $\frac{dg}{g} = \frac{dl}{l} - 2\frac{dT}{T}$

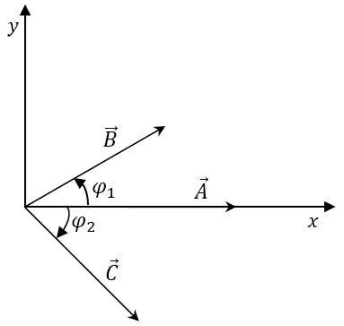
iii) On remplace par d par Δ et on prend les valeurs absolues des coefficients de Δl et ΔT car cela correspond à la valeur maximale que l'on peut avoir sur l'incertitude.

$$\Delta g = g(\frac{\Delta l}{l} + 2\frac{\Delta T}{T})$$

A.N. : $\Delta g = 0.21 m/s^2$

1.2.3 Exercice 3

Soit trois vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ tel que $\|\vec{A}\| = 3$, $\|\vec{B}\| = \|\vec{C}\| = 2$, $\varphi_1 = (\widehat{\vec{A},\vec{B}}) = \frac{\pi}{3}$ et $\varphi_2 = (\widehat{\vec{A},\vec{C}}) = \frac{\pi}{4}$



1) Déterminer les composantes des vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$.
2) Déterminer $\vec{A}+\vec{B}$, $\vec{A}-\vec{B}$ et $\vec{B}+\vec{C}$, en donnant les composantes, le module et la représentation graphique.
3) Déterminer de deux façons $\vec{A}.\vec{B}$.
4) Déterminer $\vec{A}\wedge\vec{B}$, $\vec{A}\wedge\vec{C}$, $\vec{C}\wedge\vec{B}$, $\vec{A}.(\vec{B}\wedge\vec{C})$, $\vec{B}\wedge(\vec{A}\wedge\vec{C})$.
5) Déterminer l'aire formée par $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

<u>CORRIGÉ :</u>

1) Les composantes : $\vec{A} = 3\vec{i}$, $\vec{B} = \|\vec{B}\|(\cos\varphi_1\vec{i} + \sin\varphi_1\vec{j}) = \vec{i} + \sqrt{3}\vec{j}$
$\vec{C} = \|\vec{C}\|(\cos\varphi_2\vec{i} - \sin\varphi_2\vec{j}) = \sqrt{2}\vec{i} - \sqrt{2}\vec{j}$
2) $\vec{A}+\vec{B} = 4\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j}$, $\|\vec{A}+\vec{B}\| = \sqrt{19}$; $\vec{A}-\vec{B} = 2\vec{i} - \sqrt{3}\vec{j}$, $\|\vec{A}-\vec{B}\| = \sqrt{7}$
$\vec{B}+\vec{C} = (1+\sqrt{2})\vec{i} + (\sqrt{3}-\sqrt{2})\vec{j}$; $\|\vec{B}+\vec{C}\| = \sqrt{8+2\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}$
3) Première méthode : $\vec{A}.\vec{B} = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\|\cos\varphi_1 = 3$
Deuxième méthode : $\vec{A}.\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y = 3$
4) $\vec{A}\wedge\vec{B} == \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 \end{vmatrix} = 3\sqrt{3}\vec{k}$. Suivant la même procédure, on obtient : $\vec{A}\wedge\vec{C} = -3\sqrt{2}\vec{k}$
$\vec{B}\wedge\vec{C} = -(\sqrt{2}+\sqrt{6})\vec{k}$, $\vec{A}.(\vec{B}\wedge\vec{C}) = 0$, $\vec{B}\wedge(\vec{A}\wedge\vec{C}) = -3\sqrt{6}\vec{i} + 3\sqrt{2}\vec{j}$
5) L'aire formée par $\vec{A}$ et $\vec{B}$: $Air = \frac{|\vec{A}\wedge\vec{B}|}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

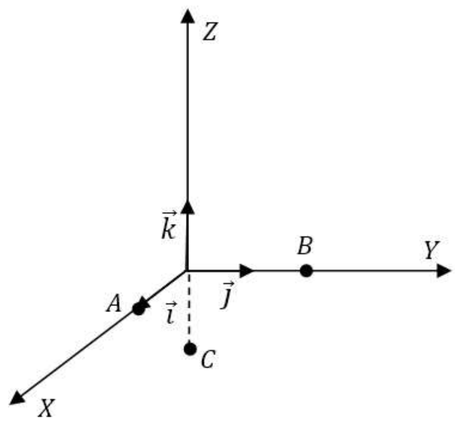
1.2.4 Exercice 4

On donne les points $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,-1)$

1) Représenter les pointes A, B et C.
2) Déterminer les composantes du vecteur $(\overrightarrow{AB})$, en déduire son module.
3) Déterminer les cosinus directeurs de vecteur $\overrightarrow{AB}$, quelle relation importantes vérifiant ils ?
4) Déterminer les composantes du vecteur unitaire porté par le vecteur $(\overrightarrow{AB})$, quelles sont ses particularités ?
5) Déterminer les composantes du vecteur $(\overrightarrow{BC})$, en déduire son module.
6) Déterminer l'angle formé entre les vecteurs $(\overrightarrow{AB})$ et $(\overrightarrow{BC})$.

<u>CORRIGÉ :</u>

1) Représentation des pointes A, B et C



2) Le vecteur $(\overrightarrow{AB})$ et son module
$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\,\vec{i} + (y_B - y_A)\,\vec{j} + (z_B - z_A)\,\vec{k} = -\vec{i} + 2\vec{j}$
$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{5}$
3) Les cosinus directeurs de $(\overrightarrow{AB})$
$$\begin{cases} \cos\theta_x = \frac{\overrightarrow{AB}\,\vec{i}}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \cos\theta_y = \frac{\overrightarrow{AB}\,\vec{j}}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \cos\theta_z = \frac{\overrightarrow{AB}\,\vec{k}}{\|\overrightarrow{AB}\|} = 0 \end{cases}$$
La relation entre les cosinus directeurs est :
$$\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta_z = 1$$
4) Le vecteur unitaire porté par $(\overrightarrow{AB})$
$$\vec{U}_{\overrightarrow{AB}} + \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{-\vec{i} + 2\vec{j}}{\sqrt{5}}$$
Les particularités de $\vec{U}_{\overrightarrow{AB}}$:
$$\begin{cases} \|\vec{U}_{\overrightarrow{AB}}\| = 1 \\ \vec{U}_{\overrightarrow{AB}} \text{ a le même sens et direction que } (\overrightarrow{AB}) \end{cases}$$
5) $\overrightarrow{BC} = -2\vec{j} - \vec{k}$; $\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{5}$

6) L'angle formé par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$:

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}}) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{-4}{5}$$

1.3 Exercices supplémentaires sans solution

1.3.1 Exercice 5

On donne :

$$L = F[\frac{1}{k} - \frac{1}{M\omega^2}]$$

où L désigne une longueur, k une constante de raideur, M une masse et ω une pulsation.

1) Vérifier l'homogénéité de l'expression précédente.
2) On donne ΔF, Δk, ΔM et $\Delta\omega$ en déduire l'incertitude absolue ΔL.

1.3.2 Exercice 6

La masse volumique ρ d'un cylindre de masse m, de rayon R et de longueur l est donnée par la relation suivante :

$$\rho = \frac{m^x}{\pi l^y R^2}$$

1) En utilisant les dimensions, trouver les deux constantes x et y.
2) En déduire l'expression exacte de la masse volumique ρ.

1.3.3 Exercice 7

On donne : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$

1) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$, en déduire l'angle θ formé par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
2) Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$, en déduire l'angle β formé par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
3) Déterminer l'aire formée par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

1.3.4 Exercice 8

On donne les vecteurs suivants : $\overrightarrow{w} = \frac{3\overrightarrow{k}}{t^2+9}$, $\overrightarrow{v} = \frac{t\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j}}{\sqrt{t^2+9}}$ et $\overrightarrow{u} = \frac{3\overrightarrow{i} + t\overrightarrow{j}}{\sqrt{t^2+9}}$.

1) Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs unitaires.
2) Calculer $\frac{d\vec{u}}{dt}$, $\frac{d\vec{v}}{dt}$, $\vec{w}\Lambda\vec{u}$ et $\vec{w}\Lambda\vec{v}$.