Introduction au cours de physique (2)

Exercices : Analyse dimensionnelle et Mesures

■ Calculs dimensionnels

Ex-2.1 **Période d'un pendule :** Soit un pendule simple constitué d'une masse m accrochée à l'extrémité mobile d'un fil de longueur l. On travaille dans le référentiel terrestre où le champ de pesanteur est $\overrightarrow{g}$.

1) Montrer, par une analyse dimensionnelle, que la période des petites oscillations de ce pendule s'écrit $T = K\sqrt{\frac{l}{g}}$, où K est une constante sans dimension.

2) Quel remarque concernant T mérite-t-elle d'être notée ?

Ex-2.2 **Vitesse de libération :** On définit v_l la vitesse de libération (ou vitesse d'évasion) d'un objet dans l'environnement de la Terre par la vitesse que l'on doit lui communiquer pour que son énergie mécanique soit nulle (➜ Cf Cours de Mécanique).

1) Quels sont les paramètres pertinents pour exprimer v_l ?

2) En déduire l'expression de v_l par une analyse dimensionnelle (cette analyse étant qualitative, on rappelle que l'expression s'obtient à une constante multiplicative sans dimension près, que seule l'analyse quantitative ou l'expérience fournie).

Ex-2.3 **Les grandeurs de Planck**

En combinant les trois constantes $\mathcal{G}$, c et $\hbar$, on obtient les grandeurs de PLANCK suivantes : $\sqrt{\frac{\hbar\mathcal{G}}{c^5}}$, $\sqrt{\frac{\hbar\mathcal{G}}{c^3}}$ et $\sqrt{\frac{\hbar c}{\mathcal{G}}}$.

1) Déterminer quelle grandeur est homogène à :

- une longueur, appelée « longueur de Planck » et notée l_P.
- une masse, appelée « masse de Planck » et notée m_P.
- une durée, appelée « durée de Planck » et notée τ_P.

2) Calculer τ_P, l_P et m_P. Pour ces applications numériques, utiliser les valeurs des constantes fournies dans la leçon **IP2**.

3) On introduit également la « température de Planck », notée T_P à partir des constantes c, k_B et m_P (masse de Planck). Déterminer l'expression de T_P et la calculer.

Ex-2.4 **Vibration d'une goutte d'eau**

La fréquence de vibration d'une goutte d'eau va dépendre de plusieurs paramètres. On supposera que la tension superficielle est le facteur prédominant dans la cohésion de la goutte ; par conséquent, les facteurs intervenant dans l'expression de la fréquence de vibration f seront :

- R, le rayon de la goutte ;
- ρ, la masse volumique, pour tenir compte de l'inertie ;
- A, la constante intervenant dans l'expression de la force due à la tension superficielle (la dimension de A est celle d'une force par unité de longueur).

On écrira donc : $f = k_1\, R^a\, \rho^b\, A^c$, où k_1 est ici une constante sans dimension ; a, b et c sont les exposants de R, ρ et A.

→ En déduire les valeurs de a, b et c.

➤ Solution

$$\left.\begin{array}{lcl} [R] & = & [\text{rayon de la goutte}] = L \\ [\rho] & = & [\text{masse volumique}] = M\,L^{-3} \\ [A] & = & \left[\dfrac{\text{force}}{\text{longueur}}\right] = \dfrac{MLT^{-2}}{L} = M\,T^{-2} \\ [f] & = & [\text{fréquence}] = T^{-1} = [k_1\,R^a\,\rho^b\,A^c] \end{array}\right\} \Longrightarrow T^{-1} = L^a\,(M\,L^{-3})^b\,(M\,T^{-2})^c \left\{\begin{array}{lcl} T^{-1} & = & T^{-2c} \\ 1 & = & L^a\,L^{-3b} \\ 1 & = & M^b\,M^c \end{array}\right.$$

Donc : $\left\{\begin{array}{rcl} 2c & = & 1 \\ a-3b & = & 0 \\ b+c & = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=-\frac{3}{2} \\ b=-\frac{1}{2} \\ c=\frac{1}{2} \end{array}\right. \Longrightarrow \boxed{f=k_1\,\frac{1}{R}\sqrt{\frac{A}{R\,\rho}}}$

Ex-2.5 **Vibration d'une étoile : modèle de Lord Raleigh (1915)**

La fréquence de vibration d'une étoile va dépendre de plusieurs paramètres. La cohésion d'une étoile étant assurée par les forces de gravitation, on s'attend à devoir faire intervenir :

- R, le rayon de l'étoile ;
- ρ, la masse volumique de l'étoile ;
- $\mathcal{G}$, la constante de gravitation universelle.

1) Donner l'expression de la fréquence de vibration f en fonction de R, ρ et $\mathcal{G}$: $f=k_2\,R^a\,\rho^b\,\mathcal{G}^c$ (sans expliciter la constante sans dimension k_2).

2) Sachant que la valeur de $\mathcal{G}$ est connue, quelles données peut-on obtenir à partir de la fréquence de vibration ?

➤ Solution

1)

$$\left.\begin{array}{rcl} [R] & = & [\text{rayon de l'étoile}]=L \\ [\rho] & = & [\text{masse volumique}]=M\,L^{-3} \\ [\mathcal{G}] & = & \left[\frac{\text{force}.r^2}{m_1\,m_2}\right]=\frac{(MLT^{-2})\,L^2}{M^2} \\ & = & M^{-1}\,L^3\,T^{-2} \\ [f] & = & [\text{fréquence}]=T^{-1}=k_2\,R^a\,\rho^b\,\mathcal{G}^c \end{array}\right\} \Rightarrow T^{-1}=L^a\,(M\,L^{-3})^b\,(M^{-1}\,L^3\,T^{-2})^c \left\{\begin{array}{rcl} T^{-1} & = & T^{-2c} \\ 1 & = & L^a\,L^{-3b}\,L^{3c} \\ 1 & = & M^b\,M^{-c} \end{array}\right.$$

Donc : $\left\{\begin{array}{rcl} 2c & = & 1 \\ a-3b+3c & = & 0 \\ b-c & = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=0 \\ b=\frac{1}{2} \\ c=\frac{1}{2} \end{array}\right. \Longrightarrow \boxed{f=k_2\,\sqrt{\rho\,\mathcal{G}}}$

2) Donc, lorsque f et $\mathcal{G}$ sont connues, la seule mesure de R donne accès à la valeur de la masse volumique ρ de l'étoile.

Ex-2.6 **Chauffage d'un lingot**

À partir du moment où l'on rentre un lingot froid dans un four chaud, la vitesse à laquelle augmentera la température au centre va dépendre des facteurs géométriques (on prendra L pour la dimension linéaire), de la conductibilité thermique (k), et de l'inertie thermique dans laquelle interviennent la capacité calorifique massique à pression constante c_P et la masse, ce qui nécessite l'introduction de la masse volumique ρ.

Soit t, la durée nécessaire pour atteindre une température donnée au centre du lingot. En appelant θ la dimension de la température et T celle du temps, on calculera les exposants de l'expression de t : $t=k_3\,c_P^a\,\rho^b\,k^c\,L^d$ (ici, k_3 est une constante sans dimension).

Rq1 : $c_P\equiv\dfrac{1}{m}\left(\dfrac{\partial H}{\partial T}\right)_P$, où H note l'enthalpie (homogène à une énergie, ➜ Cf Cours de Thermodynamique) du système de masse m.

Rq2 : La « conductibilité » thermique ou « conductivité »thermique lie le vecteur densité de flux thermique (homogène à une puissance par unité de surface) au gradient de la température (homogène à une température divisée par une longueur) : $\overrightarrow{j_{th}}\equiv-k\,\overrightarrow{grad}T$ (loi de Fourier).

➤ Solution

$t=k_3\,(c_P^a\,\rho^b\,k^c\,L^d)$

Cherchons d'abord la dimension de la conductivité thermique k :

$$[k] = \frac{[\overrightarrow{j_{th}}]}{[\overrightarrow{grad}T]} = \frac{[W.m^{-2}]}{[K.m^{-1}]} = \frac{(M\,L^2\,T^{-3})\,L^{-2}}{\theta\,L^{-1}} = M\,L\,T^{-3}\,\theta^{-1}$$

Et comme :

$[L]$ = [longueur caractéristique] $= L$,

$[c_P]$ = [capacité thermique à pression constante] $= L^2\,T^{-2}\,\theta^{-1}$,

$[\rho]$ = [masse volumique] $= M\,L^{-3}$, on en déduit :

$$T = (L^2\,T^{-2}\,\theta^{-1})^a\,(M\,L^{-3})^b\,(M\,L\,T^{-3}\,\theta^{-1})^c\,L^d$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} T &=& T^{-2a}\,T^{-3c} \\ 1 &=& L^{2a}\,L^{-3b}\,L^c\,L^d \\ 1 &=& \theta^{-a}\,\theta^{-c} \\ 1 &=& M^b\,M^c \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2a+3c &=& -1 \\ 2a-3b+c+d &=& 0 \\ a+c &=& 0 \\ b+c &=& 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=1 \\ b=1 \\ c=-1 \\ d=2 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{t = k_3\,\frac{c_P\,\rho\,L^2}{k}}$$

Ex-2.7 Déviation de la lumière par le Soleil (**)

Einstein édite en 1915 la théorie de la relativité générale. Il y décrit la gravitation comme une modification de l'espace-temps, prédisant, ainsi, des effets tels que la déviation de la lumière par des corps massifs.

Einstein avait prévu, par exemple, qu'en cas d'éclipse de Soleil, on devait pouvoir observer des étoiles qui auraient dû être occultées par le bord de celui-ci. Cet effet a été observé pour la première fois en 1919 et largement confirmé depuis.

Le but de cet exercice est de déterminer, de manière simple, l'ordre de grandeur de l'angle de déviation d'un rayon lumineux frôlant le Soleil.

Un rayon lumineux arrive au voisinage du Soleil avec un paramètre d'impact noté b (b est la distance du rayon lumineux rectiligne incident au centre du Soleil). Soient M_S et R_S la masse et le rayon du Soleil, supposé sphérique et homogène. On note c la vitesse de la lumière dans le vide ($c = 3.10^8\ m.s^{-1}$) et $\mathcal{G}$ la constante de la gravitation universelle ($\mathcal{G} = 6,67.10^{-11}\ SI$).

Données : $M_S = 2.10^{30}\ kg$; $R_S = 7.10^8\ m$.

1) Par analyse dimensionnelle, et en choisissant la solution la plus simple, montrer que l'angle de déviation θ d'un rayon lumineux passant très près du Soleil (soit $b \sim R_S$) peut s'écrire :

$$\theta = K\,\frac{\mathcal{G}\,M_S}{R_S\,c^2}$$

où K est une constante sans dimension dont la théorie de la relativité générale d'Einstein prédit la valeur ($K = 4$).

Évaluer numériquement la valeur de l'angle de déviation θ en radians (rad) puis en secondes d'arc.

2) On montre que l'angle de déviation ψ d'une particule α (de charge q, d'énergie mécanique $\mathcal{E}_{k0}$ et de paramètre d'impact b) par un noyau d'or (Q) est donné par :

$$\tan\frac{\psi}{2} = \frac{q\,Q}{4\pi\,\epsilon_0}\,\frac{1}{2b\mathcal{E}_{k0}}$$

Et bien avant Einstein, Newton avait eu la géniale intuition, que la lumière peut être constituée de particules sensibles à l'interaction gravitationnelle.

Montrer que l'angle de déviation prédit par la mécanique newtonienne θ_N est deux fois plus faible que celui donné par la relativité générale et vérifié expérimentalement (θ).

➤ **Solution**

1) On considère un rayon lumineux qui arrive près du Soleil avec un paramètre d'impact b proche du rayon solaire. L'angle de déviation θ du rayon lumineux va certainement dépendre de la vitesse de la lumière c dans le vide, de la masse M_S du Soleil, de la constante gravitationnelle $\mathcal{G}$ (caractéristique de l'interaction gravitationnelle intervenant dans ce phénomène) et du paramètre d'impact b. Si on se limite au cas où $b \simeq R_S$, on pourra écrire θ :

$$\theta = K\, c^{\alpha}\, M_S^{\beta}\, \mathcal{G}^{\gamma}\, R_S^{\delta} \quad (\star)$$

où K est une constante sans dimension (K ne pourra donc pas être déterminée par analyse dimensionnelle), et α, β, γ et δ des cœfficients tels que l'angle θ soit finalement sans dimension (et exprimé en rad, unité des angles).

La force gravitationnelle qui s'exerce entre deux masses ponctuelles m et m', distantes de r, permet d'en déduire la dimension de $\mathcal{G}$:

$$F = \mathcal{G}\,\frac{m\,m'}{r^2} \quad \rightarrow \quad [\mathcal{G}] = \frac{[F]\,[r^2]}{[m\,m']} = (M\,L\,T^{-2})\,L^2\,M^{-2} = L^3\,M^{-1}\,T^{-2}$$

L'équation aux dimension associée à $(\star)$ peut alors s'écrire :

$$[\theta] = [K]\,[c^{\alpha}]\,[M_S^{\beta}]\,[\mathcal{G}^{\gamma}]\,[R_S^{\delta}] = 1\,(L\,T^{-1})^{\alpha} M^{\beta}\,(L^3\,M^{-1}\,T^{-2})^{\gamma}\,L^{\delta} = L^{\alpha+3\gamma+\delta}\,M^{\beta-\gamma}\,T^{-\alpha-2\gamma}$$

θ étant sans dimension ($[\theta] = 1$), ceci conduit au système de trois équations à quatre inconnues :

$$\alpha + 3\gamma + \delta = 0 \quad (a); \qquad \beta - \gamma = 0 \quad (b); \qquad -\alpha - 2\gamma = 0 \quad (c)$$

La solution n'est pas unique. En choisissant γ comme paramètre, on obtient :

$$\alpha = -2\gamma, \quad \beta = \gamma, \quad \delta = -\gamma. \quad \text{Soit :} \quad \theta = K\,\left(c^{-2}\,M_S\,G\,R_S^{-1}\right)^{\gamma}$$

Les solutions les plus simples correspondent à $\gamma = 1$ ou $\gamma = -1$, soit :

$$\theta = K\,\frac{\mathcal{G}\,M_S}{c^2\,R_S} \quad (1) \qquad \text{ou} \qquad \theta = K\,\frac{c^2\,R_S}{\mathcal{G}\,M_S} \quad (2)$$

Nous pouvons faire une application numérique pour chaque cas :

$$(1) \Rightarrow \theta = 2,1.10^{-6}\,K \qquad \text{et} \qquad (2) \Rightarrow \theta = 4,7.10^{5}\,K$$

Connaissant grâce à l'énoncé la valeur de K, nous constatons que (2) conduit à une valeur aberrante. Finalement, avec $K = 4$, la déviation θ s'écrit et vaut :

$$\boxed{\theta = K\,\frac{\mathcal{G}\,M_S}{c^2\,R_S} = 8,5.10^{-6}\,rad}$$

Il s'agit d'une déviation extrêmement faible, qu'il est préférable d'exprimer en secondes d'arc (1 minute d'arc étant un soixantième de degré et une seconde d'arc un soixantième de minute d'arc) :

$$\boxed{\theta = 8,5.10^{-6}\,rad = 8,5.10^{-6}\,\frac{180}{\pi}\,3\,600 = 1,75''}$$

Lorsque le rayon lumineux possède un paramètre d'impact $b = x\,R_S$ (où x est un réel quelconque supérieur à 1), on peut montrer que l'angle de déviation du rayon lumineux est : $\theta = \dfrac{1,75''}{x}$.
C'est la Société Astronomique Royale de Londres qui, en 1919, à partir de clichés photographiques réalisés lors d'éclipses de Soleil au Brésil et en Afrique, a mis pour la première fois en

évidence la déviation de la lumière par un astre massif (le Soleil).

2) La diffusion de RUTHERFORD concerne la diffusion d'une particule chargée (particule α) par un ion massif. Elle met en jeu la force coulombienne entre ces deux charges q et Q, distantes de r. la norme de cette force est : $F_C = \dfrac{1}{4\pi\,\epsilon_0}\,\dfrac{q\,Q}{r^2}$.

Si on attribue (pour pouvoir faire l'analogie demandée) une masse m aux « particules » de lumière telles que NEWTON avait pu les imaginer, alors la norme de la force gravitationnelle entre le Soleil et une telle particule, située à une distance r du centre du Soleil, pourra s'écrire : $F_G = \mathcal{G}\,\dfrac{m\,M_S}{r^2}$.

On peut donc faire l'analogie formelle : $\dfrac{q\,Q}{4\pi\,\epsilon_0} \quad\longleftrightarrow\quad \mathcal{G}\,m\,M_S$

La lumière se propage à la vitesse c. Si ces particules de lumière massive existaient, elles auraient une énergie cinétique initiale $\mathcal{E}_{k,0} = \dfrac{1}{2}\,mc^2$, analogue de l'énergie cinétique initiale des particules α.

En poursuivant l'analogie, on trouve un angle de déviation des rayons lumineux :

$$\tan\frac{\theta_N}{2} = \mathcal{G}\,m\,M_S\,\frac{2}{2b\,mc^2}$$

Comme cette déviation est très faible (cf. **1)**), on a, pour un rayon lumineux frôlant le Soleil ($b \simeq R_S$) : $\tan\dfrac{\theta_N}{2} \simeq \dfrac{\theta_N}{2}$, soit :

$$\boxed{\theta_N = K'\,\frac{G\,M_S}{R_S\,c^2} \qquad \text{avec : } K' = 2}$$

Dans le cas où $b \simeq R_S$ ($\theta_N = \dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1,75''}{2} = 0,87''$), on a bien montré que l'angle de déviation prédit par la mécanique newtonienne est deux fois plus faible que l'angle de déviation prédit par la relativité générale (et vérifié par l'expérience).

De plus, cette analogie nous a conduit à une expression littérale qui justifie, *a posteriori*, le choix de la valeur 1 pour l'exposant γ défini à la question précédente.

■ Calculs d'incertitudes expérimentales

Ex-2.8 Indice du verre dont est constitué un prisme

Lorsqu'on mesure l'indice du verre dont est constitué le prisme d'un spectrogoniomètre, on aboutit à la formule :

$$n = \frac{\sin\dfrac{A + D_m}{2}}{\sin\dfrac{A}{2}}$$

où A est l'angle du prisme, mesuré avec une certaine incertitude ΔA,
et D_m est le minimum de déviation mesuré avec une certaine incertitude ΔD_m.

1) En utilisant la différentiation logarithmique, exprimer $\dfrac{\Delta n}{n}$, incertitude relative sur la mesure de l'indice, en fonction de A, ΔA, D_m et ΔD_m.

2) En fait, l'incertitude sur A et D_m est la même et on note $\Delta A = \Delta D_m = \epsilon$. Montrer que, compte tenu des valeurs numériques de A et D_m, l'incertitude relative sur la mesure s'écrit alors :

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{\epsilon}{2}\,\text{cotan}\,\frac{A}{2}$$

3) *Application numérique.* On donne : $A = 60°00'$; $D_m = 34°25'$; $\epsilon = 4'$. Déterminer les incertitudes relative et absolue sur l'indice n. Donner le résultat sous la forme : $n = \quad \pm \quad$.

Ex-2.9 **Mesure de la focale d'une lentille** Dans la méthode de Bessel, qui sera utilisée en T.P., la focale est donnée par la formule :

$$f = \frac{D^2 - d^2}{4\,D}$$

où D et d, avec $D > d$, sont des distances mesurées avec les incertitudes ΔD et Δd.

1) En utilisant la différentiation logarithmique, exprimer $\dfrac{\Delta f}{f}$ en fonction de Δd et ΔD.

2) En fait, l'incertitude sur D est la même que celle sur d. En déduire l'expression de $\dfrac{\Delta f}{f}$.

3) *Application numérique.* On donne : $d = 5,0\ cm$; $D = 1,500\ m$; $\Delta d = \Delta D = 5\ mm$.
Calculer les incertitudes relative et absolue sur f.
Donner le résultat sous la forme : $f = \quad \pm \quad$.

Ex-2.10 **Champ de pesanteur**
À l'altitude z au-dessus de la surface de la Terre, le champ de pesanteur est égal à :

$$g = \mathcal{G}\,\frac{M_T}{(R_T + z)^2}$$

où M_T est la masse de la Terre, R_T son rayon et $\mathcal{G}$ la constante de gravitation universelle.

Données : champ de pesanteur au niveau du sol : $g_0 = 9,807\ m.s^{-2}$; rayon de la Terre : $R_T = 6\,371\ km$.

1) Quelle est la variation relative élémentaire $\dfrac{dg}{g}$ provoquée par une variation d'altitude dz ?

2) Calculer $\dfrac{\Delta g}{g_0}$ (petit accroissement relatif) et Δg (petit accroissement) pour une élévation de $8\,000\ m$ au-dessus de la surface de la Terre. En déduire valeur de g à cette altitude.

➤ **Solution**

1) $\ln g = \ln \mathcal{G} + \ln M_T - 2\ln(R_T + z) \longrightarrow \boxed{\dfrac{dg}{g} = -2\,\dfrac{dz}{R_T + z}}$ (donc, quand $z \nearrow$, $g \searrow$).

2) $\dfrac{\Delta g}{g_0} = -\dfrac{2}{R_T + z}\,\Delta z = -\dfrac{2}{6\,371.10^3}\,8.10^3 = -2,5.10^{-3} = -0,25\%$.

$$\boxed{\frac{\Delta g}{g_0} = -0,25\%} \qquad \boxed{\Delta g = -0,025\ m.s^{-2}} \qquad \boxed{g = g_0 + \Delta g = 9,782\ m.s^{-2}}$$

■ Complément sur les données numériques et les applications numériques

◇ **Définition :** Lorsqu'on n'indique pas l'incertitude, une convention habituelle est d'indiquer *tous* les chiffres dont on est sûr et le premier chiffre *incertain* : ces chiffres constituent les **chiffres significatifs** (**C.S.**).

Rques :
- $2\,0003$ possède 5 C.S tandis que $0,00405$ n'en possède que 3 puisqu'on peut l'écrire, en notation scientifique, sous la forme $4,05.10^{-2}$.
- les entiers (ex : 7) et leurs inverses (ex : 1/3) sont considéré comme ayant une infinité de chiffres significatifs ($7 = 7,0000\ldots$ et $1/3 = 0,33333\ldots$).

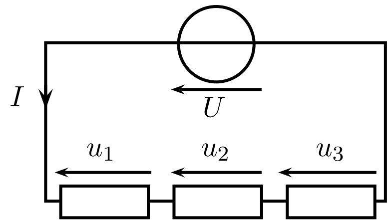
❏ **Méthode 1.— Règle de calcul 1 :** lors d'une **addition** ou d'une **soustraction** (pour laquelle toutes les nombres additionnés ou soustraits sont exprimées dans la même unité), le résultat final a autant de **décimales** que le nombre en ayant le moins.

Ex1 : Si $u_1 = 180,7\ mV$, $u_2 = 43,53\ mV$ et $u_3 = 12,708\ mV$, alors le nombre de décimales de $U = u_1 - u_2 + u_3$ est imposé par u_1 qui en a le moins (une seule décimale),
soit : $U = 180,7 - 43,53 + 12,708 = 149,878 \ \Rightarrow\ \underline{U = 149,9\ mV}$

> ❏ **Méthode 2.— Règle de calcul 2 :** lors d'une **multiplication** ou d'une **division**, le résultat final a autant de **chiffres significatifs** que le nombre en ayant le moins.

Ex2 : Un objet de masse $m = 28,31\ g$ est soumis au champ de pesanteur $g = 9,81\ m.s^{-2}$. Quel est son poids ?
Réponse : La calculatrice donne : $P = mg = 28,31 \times 9,81 = 277,7211\ N$... mais un résultat à 7 CS est illusoire lorsqu'il est le produit de deux nombres dont l'un possède 4 CS (m) et l'autre seulement 3 (g).
Comme g es le nombre ayant le moins de CS, c'est lui qui impose la précision finale du calcul du poids, en arrondissant toujours au plus près (par valeur supérieure ici) : $\underline{P = mg = 278\ N}$

Ex3 : Soit un réseau à une seule maille. Un générateur délivrant la tension U aux bornes de trois dipôles en série. Les tensions mesurées en convention récepteur aux bornes de chacun de ces dipôles sont : $u_1 = 2,81\ V$, $_2 = 3,0\ V$ et $u_3 = 0,33\ V$. Le générateur débite un courant d'intensité $I = 680\ mA$.



1) Quelle est la tension aux bornes du générateur ?
2) Quelle est la puissance fournie par le générateur au circuit ?

Réponses : Comme $U = u_1 + \underline{u_2} + u_3 = 6,14\ V$ et que u_2 ne possède qu'une seule décimale, on en déduit : $\boxed{U = 6,1V}$. Comme $\mathcal{P} = U.I = (u_1 + \underline{u_2} + u_3).I = 6,14 \times 0,680 = 4,1752\ W$ et que u_2 ne possède que 2 CS, on obtient : $\boxed{\mathcal{P} = 4,2\ W}$.
Rq : Attention ! Si on utilise l'arrondi intermédaire qu'on a fait pour exprimer la valeur de U, on obtient $\mathcal{P} = U.I = 6,1 \times 0,680 = 4,148 \simeq 4,1\ W$ qui introduit une erreur par défaut dans le résultat final.

> ❏ **Méthode 3.—** En conséquence, ne jamais utiliser les arrondis des calculs intermédiaires pour effectuer les calculs suivants. Au contraire, toujours garder les calculs intermédiaires tels que fournis par la calculatrice lorsqu'on doit les utiliser pour un calcul ultérieur.
> **Comment conserver les résultats fournis par une calculatrice ?** En les plaçant dans des « mémoires » ou grâce à la touche « Answer » qui conserve le calcul précédent.
> Par ailleurs, lorsqu'aucun calcul intermédiaire n'est requis, il est souvent plus judicieux de faire un calcul unique à la calculatrice.

L'exercice suivant permet d'appliquer les règles de calculs qui viennent d'être présentées.

Ex-2.11 La masse du Soleil

La troisième loi de Képler relie la période T et le demi-grand axe a de l'orbite d'une planète autour du Soleil :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}\, M_S}$$

avec $\mathcal{G}$ la constante de la gravitation universelle et M_S la masse du Soleil.

Données : $\mathcal{G} = (6,\ 668 \pm 0,\ 005).10^{-11}\ SI$.
Pour la Terre : $T = (365,\ 256\,365\,67 \pm 0,\ 000\,000\,0\mathbf{1})\ jours$; $a = (1,\ 496\,0 \pm 0,\ 000\,\mathbf{3}).10^{11}\ m$.

1) Déterminer les dimensions et les unités de $\mathcal{G}$.
2) Déterminer la masse du Soleil et l'incertitude ΔM_S sur cette masse.

➤ **Solution**

1) $[\mathcal{G}] = \left[\dfrac{a^3}{T^2}\,\dfrac{1}{M_S}\right] = \dfrac{L^3}{T^2}\,\dfrac{1}{M} = L^3T^{-2}M^{-1}.$

$$\boxed{[\mathcal{G}] = L^3\,T^{-2}\,M^{-1}} \longrightarrow \boxed{\text{unité}(\mathcal{G}) = m^3.s^{-2}.kg^{-1}}$$

Rq : Comme une force est homogène à $[F] = MLT^{-2}$ on pouvait tout aussi bien dire :

$$[\mathcal{G}] = [force]\,L^2\,M^{-2} \longrightarrow \text{unité}(\mathcal{G}) = N.m^2.kg^{-2}$$

2) $M_S = \dfrac{4\pi^2\,a^3}{T^2\,\mathcal{G}} \longrightarrow \ln M_S = \ln(4\pi^2) + 3\ln a - 2\ln T - \ln\mathcal{G}.$
Si on connaît les erreurs da, dT et $d\mathcal{G}$ des mesures sur a, T et $\mathcal{G}$, on peut en déduire facilement l'erreur relative sur la valeur de M_S (obtenue à partir des mesures sur a, T et $\mathcal{G}$) par une différentielle logarithmique – ce qui suppose que les erreurs sur les mesures sont très petites par rapport aux valeurs mesureés :

$$\boxed{\frac{dM_S}{M_S} = 3\,\frac{da}{a} - 2\,\frac{dT}{T} - \frac{d\mathcal{G}}{\mathcal{G}}}$$

Mais ces erreurs, algébriques (par défaut ou excès), sont inaccessibles ; on a accès seulement aux incertitudes $\Delta a = |da|_{max}$, $\Delta T = |dT|_{max}$ et $\Delta\mathcal{G} = |d\mathcal{G}|_{max}$ définissant des « intervalles de confiance » autour des mesures de a, T et $\mathcal{G}$.
L'incertitude ΔM_S sur M_S s'obtient donc à partir de l'expression précédente en se plaçant dans le cas le plus défavorable où les erreurs sur a, T et $\mathcal{G}$ s'ajoutent :

$$\boxed{\frac{\Delta M_S}{M_S} = 3\,\frac{\Delta a}{a} + 2\,\frac{\Delta T}{T} + \frac{\Delta\mathcal{G}}{\mathcal{G}}}$$

Soit : $\dfrac{\Delta M_S}{M_S} = 3\,\dfrac{\Delta a}{a} + 2\,\dfrac{\Delta T}{T} + \dfrac{\Delta\mathcal{G}}{\mathcal{G}} = 3\,\dfrac{3.10^{-4}}{1,4960} + 2\,\dfrac{10^{-8}}{365,25636567} + \dfrac{5.10^{-3}}{6,668} = 1,35.10^{-3}.$

L'application numérique donnant M_S étant un rapport, le résultat ne peut avoir plus de chiffres significatifs que la valeur numérique fournie en ayant le moins (ici, $\mathcal{G}$ qui est donnée avec 4 C.S.) ; d'où :

$$\boxed{M_S = \frac{4\pi^2\,a^3}{T^2\,\mathcal{G}} = 1,990.10^{30}\ kg}$$

On en déduit : $\Delta M_S = \dfrac{\Delta M_S}{M_S}\,M_S = 2,69...10^{27}\ kg$, soit $\boxed{\Delta M_S = 0,003.10^{30}\ kg}$ en arrondissant et puisque M_S ne peut être connue qu'à 4 C.S.

$$\boxed{M_S = (1,\,990 \pm 0,\,00\mathbf{3}).10^{30}\ kg}$$

❏ **Méthode 4.—** La plupart du temps, les données des énoncés ne seront pas toutes aussi précises que celles de l'exercice précédent, et ce manque de précision nous empêchera d'appliquer les règles de calculs sur les chiffres significatifs.
Tout en retenant ces règles lorsqu'elles sont utilisables, dans le cas contraire, **on conservera en général 3 chiffres significatifs dans le résultat final** fourni par la calculatrice (en arrondissant toujours à la décimale la plus proche).