Exercice 3 :

Une masse m est lâchée d'une hauteur $h = 53{,}6m$. À son arrivée au sol, sa vitesse est $v = \sqrt{2gh}$. Si la hauteur h est mesurée avec une erreur de $1cm$, et l'accélération gravitationnelle $g = 9{,}81m/s^2$ est connue avec une précision de 0,1%, estimer l'erreur sur la valeur de la vitesse calculée.

السرعة في السقوط الحر

يسقط جسم كتلته m من ارتفاع $h = 53{,}6m$. تعطى سرعته لدى وصوله الأرض بـ $v = \sqrt{2gh}$. قدّر الخطأ على قيمة السرعة المحسوبة، علما بأن الخطأ على الارتفاع المقاس h هو $1cm$ وأن تسارع الجاذبية $g = 9{,}81m/s^2$ يعرف بدقة 0,1%.

Hauteur	ارْتفاع
Mesurée	مُقاسة
Mesure	القِياس
Erreur	خطأ
Précision	الدِّقَّة
Estimer	قدّر
Valeur	القيمة
Grandeur	مِقدار
Incertitude	ارْتِياب
Déduire	استَنتج
Expérimentale	تجريبية
Respectives	المناسبة
Différentielle	تَفاضُل
Dérivée partielle	مُشتقّ جُزئي
Élément	عُنصُر
Infinitésimal	مُتناهي الصِغر
Quantité	مِقدار
Élémentaire	عُنصُري
Écart	فارِق
Défaut	نُقصان
Excès	زِيادة
Majorer	أعظم (أخذ أكبر قيمة)
Valeur absolue	قيمة مطلقة
Relatif (ve)	نسبي(ة)

Commentaires :

Quelque soit la technologie utilisée, on ne peut jamais réduire à zéro les erreurs de mesures. D'où toute grandeur physique est mesurée à une incertitude prés. Si la grandeur physique n'est pas mesurée directement, elle est déduite et son incertitude d'autres grandeurs physiques et leurs incertitudes.

Supposons que pour déterminer la fonction $f(x,y,z)$ on doit passer par la mesure expérimentale des valeurs de x, y et z avec leurs incertitudes respectives Δx, Δy et Δz. Cependant pour calculer l'incertitude Δf on passe par la différentielle df soit :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

où $\frac{\partial f}{\partial x}$ est une dérivée partielle[1], et chaque élément df, dx, dy et dz, est infinitésimal. Ces quantités élémentaires seront considérées comme de petits écarts ; $dx \to \Delta x$. Comme on ne peut savoir si ces écarts sont par défaut ou par excès, on doit majorer l'incertitude sur f en utilisant les valeurs absolues :

$$\Delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\Delta y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|\Delta z \blacksquare$$

Dans le cas où f, x, y, z sont des grandeurs physiques du même genre tel que $f = x + y - z$, alors $\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| = 1$ ainsi que $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$ et $\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|$. Donc $\Delta f = \Delta x + \Delta y + \Delta z$. Autrement si $f = \frac{x^\alpha \cdot y^\beta}{z^\gamma}$, on trouve l'incertitude relative :

$$\frac{\Delta f}{f} = |\alpha|\frac{\Delta x}{x} + |\beta|\frac{\Delta y}{y} + |-\gamma|\frac{\Delta z}{z}.$$

Solution :

On calcul v :

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 53{,}6} = 32{,}43\, m/s. \qquad (01)$$

Pour calculer l'incertitude Δv on procède de deux façons :

[1] $\frac{\partial f}{\partial x}$: On dérive la fonction f par rapport à la variable x en considérant les autres variables ; y et z comme constantes.

__1ère Alternative__ :

On passe par la différentielle dv de $\left(v = \sqrt{2}g^{1/2} \cdot h^{1/2}\right)$ soit :

$$dv = \frac{\partial v}{\partial g} dg + \frac{\partial v}{\partial h} dh = \sqrt{2}\frac{1}{2}g^{\frac{1}{2}-1} \cdot h^{1/2}\, dg + \sqrt{2}g^{1/2} \cdot \frac{1}{2}h^{\frac{1}{2}-1}\, dh.$$

En factorisant on obtient :

$$dv = \sqrt{2}g^{\frac{1}{2}} \cdot h^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{2}\frac{dg}{g} + \frac{1}{2}\frac{dh}{h}\right\}, \rightarrow \Delta v = v\left\{\frac{1}{2}\frac{\Delta g}{g} + \frac{1}{2}\frac{\Delta h}{h}\right\}. \qquad (02)$$

__2ème Alternative__ :

On calcul la différentielle logarithmique de $\left(v = \sqrt{2}g^{1/2} \cdot h^{1/2}\right)$ soit :

$$d \ln v = d \ln\left(\sqrt{2}g^{1/2} \cdot h^{1/2}\right) = d\left\{ln\,\sqrt{2} + \frac{1}{2}ln\, g + \frac{1}{2}ln\, h\right\}.$$

Puisque : $d \ln x = \frac{dx}{x}$, notre différentielle devient :

$$\frac{dv}{v} = \frac{1}{2}\frac{dg}{g} + \frac{1}{2}\frac{dh}{h}, \rightarrow \frac{\Delta v}{v} = \frac{1}{2}\frac{\Delta g}{g} + \frac{1}{2}\frac{\Delta h}{h}. \qquad (02)$$

mais comme on ne peut savoir si ces écarts sont par excès ou par défaut, on doit majorer l'incertitude sur f en utilisant les valeurs absolues

__Calcul de l'incertitude Δv__ :

Enfin l'incertitude relative de (02) est :

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{1}{2}\frac{\Delta g}{g} + \frac{1}{2}\frac{\Delta h}{h}.$$

Sachant que $\frac{\Delta g}{g} = 0{,}1\% = 0{,}001$ et que $\frac{\Delta h}{h} = \frac{0{,}01}{53{,}6} = 0{,}0002$, alors :

$$\frac{\Delta v}{v} = 0{,}0006$$

et l'incertitude sur la vitesse est :

$$\Delta v = 0{,}0006 \times 32{,}43\, m/s = 0{,}01946\, m/s \approx 0{,}02\, m/s. \qquad (03)$$

Ainsi la vitesse est écrite selon la convention comme suit :

$$v = (32{,}43 \pm 0{,}02)\, m/s. \qquad (04)$$

$h = (53{,}60 \pm 0{,}01)m.$

$g = (9{,}81 \pm 0{,}01)\, m/s^2.$

__N.B.__ :

Faites attention à ne pas écrire le résultat de la sorte :

$h = 53{,}6m \pm 1cm.$

$h = (53{,}6 \pm 10^{-2})m.$

$g = (9{,}81 \pm 0{,}0098)\, m/s^2.$